

Bài 1: (2,5 điểm). Xét hệ phương trình
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,12 & 0,07 \\ -0,08 & 0,36 & 0,02 \\ 0,18 & 0 & -0,21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,72 \\ 7,26 \\ -3,68 \end{pmatrix} \equiv TX + C$$

- Ta có $\|T\|_{\infty} = \mathbf{(1)}$.
- Áp dụng phương pháp lặp đơn, $X^{(0)} = C$, ta được nghiệm gần đúng $X_D^{(2)} = \mathbf{(2)}$ với sai số $\Delta_D \leq \mathbf{(3)}$.
- Áp dụng phương pháp lặp Seidel, $X^{(0)} = C$, ta được nghiệm gần đúng $X_S^{(2)} = \mathbf{(4)}$ với sai số $\Delta_S \leq \mathbf{(5)}$.

Bài 2: (2,5 điểm). Cho bài toán Cauchy
$$\begin{cases} y' = y^2 - 2 \cos x \\ y(2) = 0,5 \end{cases}$$

- Áp dụng công thức Euler với $h = 0,1$ ta có $y(2,2) \approx \mathbf{(6)}$ và $y(2,5) \approx \mathbf{(7)}$.
- Áp dụng công thức RK2 với $h = 0,2$ ta có $y(2,2) \approx \mathbf{(8)}$ và $y(2,4) \approx \mathbf{(9)}$.
- Áp dụng công thức Euler cải tiến 2 vòng lặp với $h = 0,2$ ta có $y(2,2) \approx \mathbf{(10)}$.

Bài 3: (4 điểm). Cho bảng giá trị của hàm $y = f(x)$ như sau

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
y = f(x)	1,28	1,92	2,15	4,72	4,84	5,25	5,58

Giả sử $|f^{(3)}(x)| \leq 0,5; \forall x \in [0,2; 0,6]$ và $|f^{(4)}(x)| \leq 0,8; \forall x \in [0; 1,2]$.

- Sai phân cấp 1 và cấp 2 của hàm $f(x)$ tại $x = 0,2$ lần lượt là $\Delta^1 = \mathbf{(11)}$ và $\Delta^2 = \mathbf{(12)}$.
- Áp dụng nội suy bậc 2 tại 3 mốc 0,2; 0,4; 0,6 ta có $f(0,25) \approx \mathbf{(13)}$ và sai số $\Delta \leq \mathbf{(14)}$.
- Áp dụng công thức Simpson ta có $\int_0^{1,2} f(x)dx \approx \mathbf{(15)}$ với sai số không quá $\mathbf{(16)}$.

- Áp dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất với công thức xấp xỉ dạng $f(x) = ax^3 + b$ cho bảng số liệu trên ta được $a = \mathbf{(17)}$ và $b = \mathbf{(18)}$.

Bài 4: (1 điểm). **Tự luận.** Biết phương trình $4x^2 - e^{2x} + 5 = 0$ có 1 nghiệm x^* nằm trong $(1; 2)$. Chứng minh rằng với $x_0 \in (1; 2)$ tùy ý, dãy lặp $x_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(4x_n^2 + 5)$ sẽ hội tụ về nghiệm x^* của phương trình trên.

HẾT

Ghi chú:

- Trong các tính toán lấy kết quả với 4 chữ số thập phân.
- Nghiệm của hệ phương trình trong bài 1 được viết dưới dạng vector dòng.
- Cán bộ coi thi không giải thích đề thi.

Ngày 29 tháng 10 năm 2014

Chủ nhiệm Bộ môn

Bài 1: (2,5 điểm). Xét hệ phương trình
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25 & 0,12 & 0,07 \\ 0,08 & -0,36 & 0 \\ 0,18 & 0,05 & -0,21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,72 \\ -7,26 \\ 3,68 \end{pmatrix} \equiv TX + C$$

- Ta có $\|T\|_{\infty} = \mathbf{(1)}$.
- Áp dụng phương pháp lặp đơn, $X^{(0)} = C$, ta được nghiệm gần đúng $X_D^{(2)} = \mathbf{(2)}$ với sai số $\Delta_D \leq \mathbf{(3)}$.
- Áp dụng phương pháp lặp Seidel, $X^{(0)} = C$, ta được nghiệm gần đúng $X_S^{(2)} = \mathbf{(4)}$ với sai số $\Delta_S \leq \mathbf{(5)}$.

Bài 2: (2,5 điểm). Cho bài toán Cauchy
$$\begin{cases} y' = y^2 + 5 \cos x \\ y(2) = 0,5 \end{cases}$$

- Áp dụng công thức Euler với $h = 0,1$ ta có $y(2,2) \approx \mathbf{(6)}$ và $y(2,5) \approx \mathbf{(7)}$.
- Áp dụng công thức RK2 với $h = 0,2$ ta có $y(2,2) \approx \mathbf{(8)}$ và $y(2,4) \approx \mathbf{(9)}$.
- Áp dụng công thức Euler cải tiến 2 vòng lặp với $h = 0,2$ ta có $y(2,2) \approx \mathbf{(10)}$.

Bài 3: (4 điểm). Cho bảng giá trị của hàm $y = f(x)$ như sau

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
y = f(x)	0,18	0,79	1,15	1,72	2,84	3,07	4,16

Giả sử $|f^{(3)}(x)| \leq 0,2; \forall x \in [0,2;0,6]$ và $|f^{(4)}(x)| \leq 0,5; \forall x \in [0;1,2]$.

- Sai phân cấp 1 và cấp 2 của hàm $f(x)$ tại $x = 0,2$ lần lượt là $\Delta^1 = \mathbf{(11)}$ và $\Delta^2 = \mathbf{(12)}$.
- Áp dụng nội suy bậc 2 tại 3 mốc 0,2; 0,4; 0,6 ta có $f(0,25) \approx \mathbf{(13)}$ và sai số $\Delta \leq \mathbf{(14)}$.
- Áp dụng công thức Simpson ta có $\int_0^{1,2} f(x)dx \approx \mathbf{(15)}$ với sai số không quá $\mathbf{(16)}$.
- Áp dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất với công thức xấp xỉ dạng $f(x) = ax^3 + b$ cho bảng số liệu trên ta được $a = \mathbf{(17)}$ và $b = \mathbf{(18)}$.

Bài 4: (1 điểm). **Tự luận.** Biết phương trình $4x^2 - e^{2x} + 5 = 0$ có 1 nghiệm x^* nằm trong $(1; 2)$. Chứng minh rằng với $x_0 \in (1; 2)$ tùy ý, dãy lặp $x_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(4x_n^2 + 5)$ sẽ hội tụ về nghiệm x^* của phương trình trên.

HẾT

Ghi chú:

- Trong các tính toán lấy kết quả với 4 chữ số thập phân.
- Nghiệm của hệ phương trình trong bài 1 được viết dưới dạng vector dòng.
- Cán bộ coi thi không giải thích đề thi.

Ngày 29 tháng 10 năm 2014

Chủ nhiệm Bộ môn